

## グラフ巡回問題とその近似算法に関する研究

著者	渡邊 孝博
号	854
発行年	1981
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/9590">http://hdl.handle.net/10097/9590</a>

氏 名	わた 渡	なべ 邊	たか 孝	ひろ 博
授 与 学 位	工	学	博	士
学 位 授 与 年 月 日	昭和 57 年 2 月 10 日			
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 1 項			
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 (博士課程) 情報工学専攻			
学 位 論 文 題 目	グラフ巡回問題とその近似算法に関する研究			
指 導 教 官	東北大学教授 斎藤 伸自			
論 文 審 査 委 員	東北大学教授 斎藤 伸自      東北大学教授 木村 正行 東北大学教授 竹田 宏      東北大学助教授 西関 隆夫			

## 論 文 内 容 要 旨

本論文では，グラフ理論およびその応用の歴史の中で常に興味ある主要テーマの一つであるグラフ巡回問題を取り上げ，計算機による問題解法という観点から巡回問題を考察したものである。まず，グラフ巡回問題はグラフの枝をたどる問題と節点をたどる問題とに大別され，更に，そのたどり方により次のように分類される。すなわち，

(i) オイラー閉路問題：グラフの全ての枝をただ一度ずつ通って出発点に戻る径路を発見する問題，

(ii) 中国人ポストマン問題：グラフの全ての枝を少なくとも一度は通って出発点に戻る最短の径路を発見する問題，

(iii) ハミルトン閉路問題：グラフの全ての節点をただ一度ずつ通って出発点に戻る径路を発見する問題，および，

(iv) 巡回セールスマン問題：グラフの全ての節点を少なくとも一度は通って出発点に戻る最短の径路を発見する問題

である。本論文では特にあるグラフの族に対して巡回路の長さの上限を議論したものである。また，その長さの上限を導出する過程に基づいて，そのような上限を満足する巡回路を求める効率よい近似算法を与えている。

まず第 1 章では，まえがきとしてグラフ理論とその応用の歴史を概観している。単純な巡回問題から出発したグラフ理論は，今や工学の分野は勿論，様々な分野に利用されている。特に最近

では、ICやプリント基板の計算機支援設計(CAD)やORへの応用で、巡回問題を含めたいわゆる径路問題は非常に注目されており、その応用の広さおよびその重要性、必要性がこの章で述べられている。

第2章では、オイラー閉路問題の一般化として中国人ポストマン問題を取り上げ、様々なグラフの族に対して中国人ポストマンワーク(CPW)の長さの上限が議論されている。特に、単純無向グラフの族、多重無向グラフの族および擬無向グラフ族を対象とし、それぞれの族に対して、まず、

(i) 節点の次数に制限のない場合、および

(ii) 節点の次数がいずれも3である場合

について、それぞれCPWの長さの上限を明らかにしている。次に、グラフの次数2の節点の存在する部分が、全て次数3の節点となるようなグラフの変形操作を定義して(図1)、

(iii) 節点の次数がいずれも2以上3以下である場合

に対して、CPWの長さの上限を帰納的証明により明らかにしている。以上の結果を踏まえて、最終的に、

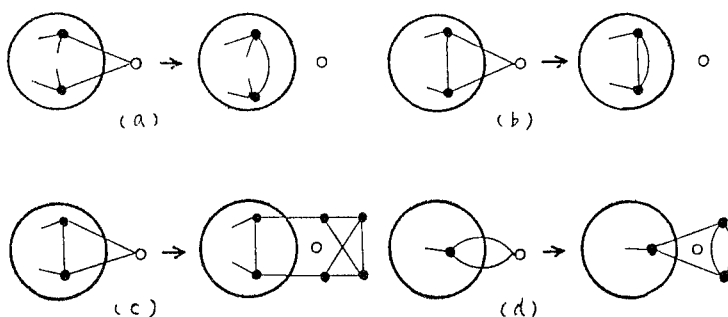


図1 グラフAの変形

(iv) 節点の次数が3以下である場合

のCPWの長さの上限を節点数 $p$ の一次関数として与えている(表1)。グラフのCPWに関するこのような議論は、スクールバス巡回路や巡回警備路、線路点検巡回路などの径路決定のような問題に実際に適用されるものである。従って、本論文でCPWの長さの上限が明らかにされたことの意義は大きく、この種の径路決定問題において、予めその解の大きさを見積ることができるという大きな利点がある。第2章では、更に、前記(i)–(iv)の各場合に対し、CPWの長さが丁度上限値をとるようなグラフの構造が示されている。このようにグラフの構造を特徴付けておくことは、今後、他の様々なグラフの族に対してCPWを議論する際の指針として用いることができる。

第3章および第4章では、NP完全問題としてもよく知られるハミルトン閉路問題の一般化として、ハミルトンワーク問題を取り上げた。グラフのハミルトン閉路問題、ハミルトン道問題、更に、巡回セールスマン問題は、その最適解を計算機によって求めることが非常に困難な問題で

表1 CPWの長さの上限

単純無向グラフ：

$$\begin{cases} 2p + \lfloor (p - 10) / 6 \rfloor & (p \geq 10) \\ 2p & (p = 4, 6, 8) \\ 2p - 1 & (p = 5, 7, 9) \end{cases}$$

多重無向グラフ：

$$\begin{cases} 2p + \lfloor (p - 6) / 4 \rfloor & (p \geq 6) \\ 2p - 1 & (p = 3, 5) \\ 2p & (p = 2, 4) \end{cases}$$

擬無向グラフ：

$$2p + \lfloor (p - 2) / 2 \rfloor \quad (p \geq 2)$$

ある。それにもかかわらず、この問題は多くの径路問題の中でも特に重要な応用をもつ。そこで、最適解を求めることは困難でも、そのよい近似解を与えることでさえ非常に大きな意義がある。一方、対象とするグラフの族を3連結平面グラフに制限してもハミルトン閉路問題はNP完全な問題であるが、4連結平面グラフの場合にはそのハミルトン閉路を求める算法が構成できる。そこで本論文では、3連結平面グラフのうちで更に限定された極大平面グラフの族を対象として、全ての節点を少なくとも一度は通って出発点に戻る巡回路(CSW)の長さを議論している。

まず第3章では、節点数 $p$ の極大平面グラフのCSWとして、グラフが非ハミルトングラフである場合にも、その長さが $3(p-3)/2$ 以下のものが必ず存在することを明らかにしている。この証明として、極大平面グラフを2個の極大平面部分グラフに分割し(図2)、それぞれに帰納法が適用できない唯一の場合に対しては、グラフから次数3の節点を全て除去して4連結極大平面グラフに変形するという操作を施した上で、その4連結極大平面グラフのハミルトン閉路を基に、順次より長い巡回路を構成していく手法を用いている(図3)。この部分の証明は極めてアルゴリズム的なものであり、この種の組合せ問題の証明法として興味深いものである。さて、グラフのCSWのうちで最短のものが実はハミルトンウォークである。従って、ここで明らかにされた極大平面グラフの

CSWの長さの上限はすなわちハミルトンウォークの長さの上限である。しかも、ハミルトンウォークの長さが丁度 $3(p-3)/2$ となるような

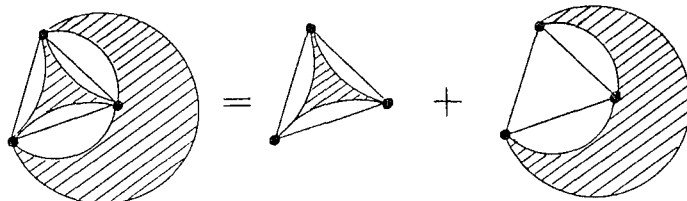


図2 極大平面グラフの極大平面部分グラフへの分割

極大平面グラフが少なくとも一個は存在し、また、ハミルトンウォークの長さが  $4(p-2)/3$  であるような極大平面グラフは無数に存在することから (図4), 本論文で求めた  $3(p-3)/2$  という上限値は、全ての極大平面グラフに対して最適ではないにしろ、非常によい上限を与えていると言える。また、その係数値  $3/2$  が自明な上限の係数値 2 と下限の係数値 1 との丁度中間の値であることも興味深い結果である。

第4章では、第3章で明らかにされた極大平面グラフのCSWの長さの上限を満足するCSW, つまり、ハミルトンウォークの近似解を実際に求める算法が提案されている。この算法は基本的

には第3章の証明手順に基づいており、組合せ問題を解く算法によく利用される「分割統治法」, 「増分法」および「強欲最適化法」を適用している。また、既に知られている4連結極大平面グラフのハミルトン性の証明を利用して、そのハミルトン閉路を見つける効率よい算法を構成し、利用している。

更に、全体として効率よく計算機処理を行なわせるために、グラフの極大平面性を利用したデータ構造が構成されている。こうした算法上の工夫およびデータ構造上の工夫により、本算法は時間複雑度が  $O(p^2)$  ( $p$  はグラフの節点数) であり、従来の近似ハミルトンウォーク発見算法の時間複雑度  $O(p^3)$  よりも非常に効率がよく、また、常に真値の高々  $3/2$  倍の

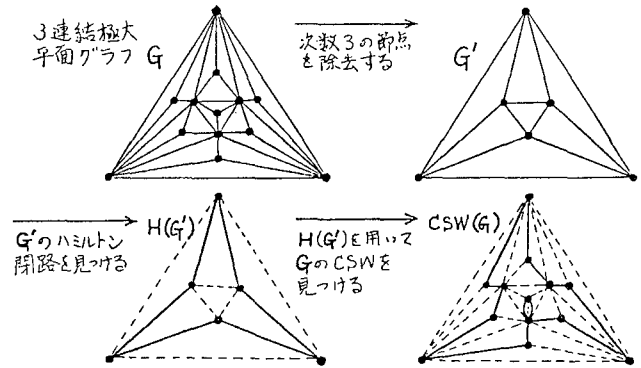


図3 4連結極大平面部分グラフを利用してCSWを見つける

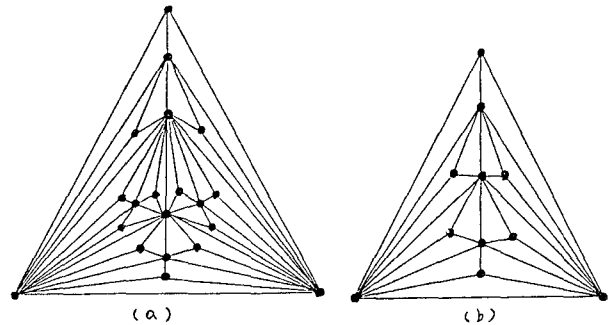


図4 ハミルトンウォークの長さが(a)  $4(p-2)/3$ , (b)  $3(p-3)/2$  の例

長さの近似ハミルトンウォークを与えることが保証されている点でも優るものである。

第5章は結論である。また、本論文の付録として、第4章で用いられたアルゴリズムの詳細部分および基本的データ構造が示されている。更に、極大平面グラフを極大平面部分グラフに分割して構造化しておくプログラムおよび4連結極大平面グラフのハミルトン閉路を求めるプログラムがFORTRAN-IV言語で記載されている。

今後の課題としては、実用的な面で重要な様々なグラフの族に対して、中国人ポストマンウォークあるいはハミルトンウォークの長さのよい上限を明らかにすること、そのような上限を与えるグラフ構造の特徴付け、および、効率よい近似算法の構成などが挙げられる。

## 審 査 結 果 の 要 旨

ネットワークの故障検査問題や巡回セールス問題など多くの組合せ問題は、グラフの節点あるいは枝の全てを通る最短な巡回路を見つける、いわゆるグラフ巡回問題として定式化できる。しかし、グラフ巡回問題の多くはNP-完全であり、効率の良い算法は見つかっておらず、その近似算法の研究が緒についたばかりである。

著者は、実用上重要と思われる2つのグラフ巡回問題を取りあげ、種々の興味深いグラフの族に対して最短巡回路長の上限を節点総数の一次関数として表現する式を導いている。また、上限を求める際に用いた手法を利用して、近似解を求める算法を与えている。本論文はその成果をとりまとめたもので、全文5章よりなる。

第1章は序論である。

第2章では、中国人ポストマン問題、すなわちグラフの全ての枝を少なくとも1回通るような最短巡回路を求める問題を取りあげ、種々のグラフの族に対して、最短巡回路長の上限を与える式を導いている。それらの上限式が全て節点総数の一次関数という簡明な形で表現され、極めて見通しのよい結果となっている点は注目に値する。

第3章では、グラフの全ての節点を少なくとも1回通る最短な巡回路を見いだす、いわゆるハミルトンウォーク問題を取りあげている。特に、極大平面グラフには長さが節点総数の1.5倍以内のハミルトンウォークが必ず存在するという極めて興味深い定理を導き、巧妙な証明を与えている。

第4章では、前章の定理の証明に現われるグラフ分割の手法を用いて、極大平面グラフのハミルトンウォークを求める効率のよい近似算法を与えている。しかもその算法によって求められる近似解は最適解の1.5倍以内の長さであることが保証されている。この結果は他の多くの組合せ近似問題がNP-完全であることと比べて興味深い。

第5章は結論である。

以上要するに、本論文はいくつかの重要なグラフ巡回問題を取り上げ、中国人ポストマンウォーク問題に対しては最短巡回路長の上限を与える式を導き、また極大平面グラフのハミルトンウォーク問題に対しては最短巡回路長の上限ならびに効率の良い近似算法を求めるなど、グラフ巡回問題の解法について興味ある知見を加えたもので、情報工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。